

# 位相空間論・関数解析学の詳細解説

本資料は、開集合という「静的な広がり」ではなく、ネットや数列の収束という「動的な接近」の観点から、位相空間、超関数、そして局所凸空間の構造を深く理解するためのまとめです。

## 1. ネットの収束による位相空間の定義

通常、位相空間は「開集合系」からスタートして収束を定義しますが、逆に「どのようなネットがどの点に収束するか」というルールを先に決めることで、位相構造を完全に逆算して規定することが可能です。ただし、適当なルールでは破綻してしまうため、ジョン・ケリー (John L. Kelley) が整理した以下の4つの公理を満たす必要があります。

### ケリーの収束公理 (4条件)

- 定数ネットの公理:** 任意の点  $s \in X$  に対し、すべての項が  $s$  である定数ネットは  $s$  に収束する。
- 部分ネットの公理:** ネット  $(x_\lambda)$  が  $s$  に収束するなら、その任意の「部分ネット (subnet)」も  $s$  に収束する。
- 離散性の公理:** あるネット  $(x_\lambda)$  が  $s$  に収束しないなら、その部分ネット  $(y_\mu)$  で「そのさらにいかなる部分ネットも  $s$  に収束しない」というものが存在する。
- 反復極限の公理 (対角線公理):** ネットの各項自体が別のネットの極限である場合、それらを適切に「斜め」に結んだ部分ネットも元の極限に収束する。

これらの公理を満たす収束関係  $\rightarrow$  が与えられたとき、集合  $A$  の閉包 (Closure) を次のように定義します。

$$\text{cl}(A) = \{s \in X \mid A \text{ 内の点からなるあるネット } (x_\lambda) \text{ が存在して } x_\lambda \rightarrow s\}$$

この閉包作用素から開集合系を導き出すことで、位相空間が定義されます。「数列 ( $\mathbb{N}$ )」だけでは添字が小さすぎて全方位をカバーしきれない巨大な空間でも、「ネット」であればすべての位相構造を記述し尽くすことができます。

## 2. 列型空間と第一可算公理

ネットという巨大な道具を捨てて「数列」だけで位相を記述するためには、空間そのものに可算的な制約を課す必要があります。

### 空間のクラス分け

- **第一可算空間:** 各点が高々可算な近傍基を持つ空間。いかなるネットの挙動も数列でエミュレートできるため、ネットは不要になります。
- **フレシェ・ウリゾン空間:** 点  $a$  が集合  $A$  の触点であることと、 $A$  内の数列で  $a$  に収束するものが存在することが同値になる空間。
- **列型空間 (Sequential space):** 「集合  $U$  の外に収束するいかなる数列も、実質的に  $U$  の外に留まるなら、 $U$  は開集合である」という条件が成立する空間。数列の収束情報だけで開集合・閉集合が決定できます。

### ネットを用いた第一可算公理の純粋な特徴付け

「開集合」や「近傍」という言葉を直接使わず、二項関係  $(x_\lambda) \rightarrow a$  のみを用いて第一可算性を特徴付けることも可能です。まず、ネットの没入を用いて近傍を定義し、次のように表現します。

第一可算公理の特徴付け：

各点  $a$  において、ある可算な近傍の族  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が存在して、任意のネット  $(x_\lambda)$  について以下が成り立つ：

$(x_\lambda) \rightarrow a \iff$  任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $(x_\lambda)$  が  $V_n$  に最終的に没入する

つまり、「たった数えられる程度のフィルター ( $V_n$ ) を通すだけで、その点へのあらゆる収束を完璧に判定できる」状態が第一可算性です。

### 3. 超関数の空間 $\mathcal{D}'(\Omega)$ と弱\*位相

超関数の空間  $\mathcal{D}'(\Omega)$  は、テスト関数空間  $\mathcal{D}(\Omega)$  上の連続線形汎関数の全体です。ここに通常入れられるのは弱\*位相 (**Weak-\* topology**) です。

ネット  $(T_\lambda)$  が  $T \in \mathcal{D}'$  に収束するとは、任意のテスト関数  $\phi \in \mathcal{D}$  に対して以下が成り立つことを指します：

$$\langle T_\lambda, \phi \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle$$

この  $\mathcal{D}'(\Omega)$  は第一可算公理を満たしません。しかし、実用上は数列による議論が頻繁に行われます。その理由は、 $\mathcal{D}'(\Omega)$  が点列完備 (**Sequentially complete**) という強力な性質を持っているからです。バナッハ・シュタインハウスの定理により、各点収束する超関数の数列の極限は、自動的に再び連続性を保った超関数になります。

### 4. テスト関数空間 $\mathcal{D}(\Omega)$ の「強すぎる」位相 (LF空間)

超関数を受け入れる土台であるテスト関数空間  $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$  における収束は、極めて厳しく定義されています。

#### $\mathcal{D}(\Omega)$ における数列の収束条件

1. 台の一致性 (檻の固定) : すべての関数の台  $\text{supp}(\phi_n)$  が、共通のコンパクト集合  $K$  に含まれている。関数が無限遠へ逃げることを許されません。

2. 全階微分の一様収束: 任意の多重指標  $\alpha$  に対して、導関数の列  $\partial^\alpha \phi_n$  が  $\partial^\alpha \phi$  に一様に収束する。無限回微分可能な滑らかさが極限まで同期して保たれます。

なぜこれほど厳しいのか？ それは、 $\mathcal{D}(\Omega)$  の位相を強く（収束しにくく）するほど、そこから定義される線形写像（=超関数）が「連続」という合格通知をもらいやすくなるからです。これにより、デルタ関数のような特異な対象も連続線形汎関数として正当化されます。

## LF空間（帰納的極限）としての構造

$\mathcal{D}(\Omega)$  は、各コンパクト集合  $K$  上のフレシェ空間  $\mathcal{D}_K$  をパッチワークのように結合したLF空間です。LF位相とは、各  $\mathcal{D}_K$  の位相を壊さない範囲で、全体に最も強い（開集合が最も多い）局所凸位相を入れたものです。

この構造の凄みは、0の基本近傍系に現れます。 $\mathcal{D}(\Omega)$  の0の近傍は、無限個の連続な重み関数  $\epsilon_m(x)$  を用いて、各点・各階微分ごとに独立して「許容誤差の締め付け」を行うことができます。これにより近傍は非可算無限個となり第一可算性は失われますが、LF空間特有の「有界集合は必ずどこかの  $\mathcal{D}_K$  に収まる」という性質により、線形写像の連続性のチェックは実質的に数列（点列連続性）だけで完全に決定できてしまいます。

## 5. 局所凸空間と樽型空間

### 局所凸空間 (Locally Convex Space)

ネットや超関数の議論を根底で支えるのが局所凸空間です。これは「ノルムほど単純ではないが、無数の『ものさし（セミノルム）』を用意することで、点の近さを測れるベクトル空間」です。

基本近傍系が「凸集合」のみからなる、あるいはセミノルムの族によって位相が定義されます。局所凸性を仮定する最大の理由は、ハーン・バナッハの定理を成立させ、空間を「超平面」で切り分け、連続線形汎関数（超関数）が豊富に存在することを保証するためです。

### 樽型空間 (Barreled Space)

局所凸空間の中でも、特に優れた性質を持つのが樽型空間です。

**樽 (Barrel)** とは：凸・均衡・閉・吸分的な集合。ノルム空間の「単位閉球」が持つ最低限の性質を備えた全方位をカバーする集合。

**樽型空間**とは：空間内の任意の「樽」が、自動的に0の近傍になってしまう空間。

樽型空間の最大の恩恵は、バナッハ・シュタインハウスの定理（一様有界性の原理）が成立することです。これによって、各点で有界な連続線形写像の族が全体として同等連続になります。超関数の極限が再び超関数になるという安心感は、まさに  $\mathcal{D}(\Omega)$  や  $\mathcal{D}'(\Omega)$  が樽型空間であることに支えられています。

空間のクラス	樽型か？	位相・構造的特徴
バナッハ空間 / フレシェ空間	Yes	ベールのカテゴリー定理により自動的に樽型になる。距離付け可能。
LF空間 ( $\mathcal{D}(\Omega)$ など)	Yes	樽型空間の帰納的極限は再び樽型になる。非可算のセミノルムを持つ。
$\mathcal{D}'(\Omega)$ (弱*位相)	Yes	モンテル空間であるため自動的に樽型。第一可算ではないが点列完備。